

4. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3 \cdot 9^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 9^n \left(\left(\frac{5}{9} \right)^n - 3 \right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty(0 - 3) = -\infty$$

Přičemž využíváme známého faktu (dokázaného v příkladu 5): $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}$.

Příklad 1 (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{n \cdot n!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1 + 0 = 1$$

Příklad 1 (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} + 2n}{n! + \sqrt{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{n! + \sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n! + \sqrt{n}}$$

Dle růstové škály: $9^n \ll n!$ a $n \ll n!$. Proto limity vycházejí jako nula.

Příklad 1 (d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 7n^3 - 5}{50n^5 - 24n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left(6 + \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^6} \right)}{n^5 \left(50 - \frac{24}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(6 + \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^6} \right)}{50 - \frac{24}{n^3}} = \\ &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty \cdot \frac{6 + 0 - 0}{50 - 0} = \infty \end{aligned}$$

Příklad 1 (e)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7^n + n^3 \cdot 5^n}{-3n \cdot 7^n + \sqrt{n} \cdot 6^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n \left(n^2 + n^3 \cdot \left(\frac{5}{7} \right)^n \right)}{7^n \left(-3n + \sqrt{n} \cdot \left(\frac{6}{7} \right)^n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{5}{7} \right)^n \right)}{n \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{6}{7} \right)^n \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2 \left(\frac{5}{7} \right)^n}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{6}{7} \right)^n} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{\infty + 0}{-3 + 0 \cdot 0} = -\infty \end{aligned}$$

přičemž $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{5}{7} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\left(\frac{7}{5} \right)^n} \stackrel{\text{r.š.}}{=} 0$, neb $n^2 \ll \left(\frac{7}{5} \right)^n$.

Příklad 1 (f)

Vzorec: $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

Definujme několik výrazů, jež budou použity ve výpočtu níže:

$$\begin{aligned} C := & (n^2 + 2)^{\frac{5}{2}} + (n^2 + 2)^2(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 + 2)^{\frac{3}{2}}(n^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + (n^2 + 2)(n^3 + 1) + \\ & + (n^2 + 2)^{\frac{1}{2}}(n^3 + 1)^{\frac{4}{3}} + (n^3 + 1)^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

$$B := \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) + \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt[6]{(n^2 + 2)^3} - \sqrt[6]{(n^3 + 1)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right) \frac{C}{C} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(n^2 + 2)^3 - (n^3 + 1)^2}{C} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n^6 + 6n^4 + 12n^2 + 8 - n^6 - 2n^3 - 1}{C} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{6n^4 - 2n^3 + 12n^2 + 7}{C} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(6 - \frac{2}{n} + \frac{12}{n^3} + \frac{7}{n^4}\right)}{n^5 B} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{2}{n} + \frac{12}{n^3} + \frac{7}{n^4}}{B} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{6 - 0 + 0 + 0}{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \cdot \sin(2n)}{n \cdot \cos(3n) + (2n + \sin(4n))^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin(2n)}{n}\right)}{n^2 \left(\frac{\cos(3n)}{n} + 4 + \frac{4 \sin(4n)}{n} + \frac{\sin^2(4n)}{n^2}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin(2n)}{n}}{\frac{\cos(3n)}{n} + 4 + \frac{4 \sin(4n)}{n} + \frac{\sin^2(4n)}{n^2}} \\ &\stackrel{\text{VoAL} + (\P)}{=} \frac{2 + 0 + 0}{0 + 4 + 0 + 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(\P): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n)}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(3n)}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sin(4n)}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(4n)}{n^2} = 0$, neb jde o limity typu om. $\cdot$ 0

Příklad 2 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

dle růstové škály.

Příklad 2 (b)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{(5,00001)^n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{(5,00001)^n} + \frac{2^n}{(5,00001)^n} + \frac{3^n}{(5,00001)^n} + \frac{4^n}{(5,00001)^n} + \frac{5^n}{(5,00001)^n} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + (*)}{=} 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

$$(*): a \in (0, 1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

Příklad 2 (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)} \stackrel{\text{VoAL} + (*) \text{ výše}}{=} \frac{1 + 0}{3(1 + 0)} = \frac{1}{3}$$

Příklad 2 (d)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n^7}{3^n} + \frac{n \cdot n!}{3^n}} + \frac{1}{n^2 + \frac{n!}{n^4}} + \frac{(n+1) \cdot n!}{n^7 + n \cdot n!} \right) = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + \text{růstová škála}}{=} 0 + 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + n \cdot n!}{n^7 + n \cdot n!} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n^7}{n!} + n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n^6}{n!} + 1} = \\ &\stackrel{\text{růstová škála}}{=} 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

Přičemž při limitě výrazu $\frac{n \cdot n!}{3^n}$ postupujeme takto: růstovou škálu aplikujeme na $\frac{n!}{3^n}$, což jde do nekonečna. Zároveň n jde do nekonečna. Tedy $n \cdot \frac{n!}{3^n} \stackrel{\text{VoAL}}{\rightarrow} \infty \cdot \infty = \infty$.

Poznámka k růstové škále: Růstová škála neumí, když je v čitateli či jmenovateli součin více prvků růstové škály. Tyto případy je třeba ošetřit. Zde se tak stalo u výrazu $\frac{n \cdot n!}{3^n}$. Někdy si lze pomoci např. dvěma strážníky a v součinu jednotlivé činitele zvětšovat/zmenšovat (silnější na slabšího a naopak).

Poznámka k postupu: Je nutné zlomek rozložit na součet zlomků, neb růstová škála nám nic neříká o součtu věcí. Pak je nutné „vršek přehodit dolů“ - pomocí finty: $\left(a = \frac{1}{\frac{1}{a}}\right)$ - neb dole je vlastně součet a to opět růstová škála nezná. Obecně by mohlo stačit „přehodit dolů“ jen část čitatele - vytýkáme vždy nejsilnější věci. Pak jsme již dostali podíly prvků růstové škály a můžeme ji tedy konečně použít.

Příklad 2 (e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n}$$

Použijeme větu o dvou strážnících.

Zřejmě od určitého n_0 platí, že:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{3} \rightarrow 3.$$

Příklad 2 (f)

$$\text{Vzorec: } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left(3^{\frac{n-1}{n}} + 3^{\frac{n-2}{n}} 2^{\frac{1}{n}} + \dots + 3^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{n-2}{n}} + 2^{\frac{n-1}{n}} \right)^{-1}$$

Platí:

$$2^{\frac{n-j}{n}} = \sqrt[n]{2^{n-j}} \leq \sqrt[n]{3^{n-j}} = 3^{\frac{n-j}{n}}.$$

Tedy

$$0 \leq \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \right) \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{n \cdot 2^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{2^n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{2}} \xrightarrow{\text{VoAL}} 0.$$

Přičemž $\frac{2}{\sqrt[n]{2}} \rightarrow \frac{2}{1}$ - dle vzorce z teorie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$.

Dle věty o dvou strážnících pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = 0$.

Příklad 2 (g)

Vzorec: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n + n - n^n}{(n^n + n)^{\frac{n-1}{n}} + (n^n + n)^{\frac{n-2}{n}} n + \dots + (n^n + n)^{\frac{1}{n}} n^{n-2} + n^{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{n-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n}} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{n-2} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n}} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} + 1 \right)} = \end{aligned}$$

Zřejmě

$$1 \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{n-j}} = \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-j}{n}}.$$

Pak

$$0 \leq \frac{1}{n^{n-2} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n}} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} + 1 \right)} \leq \frac{1}{n^{n-2}(n-1+1)} \xrightarrow{\text{VoAL}} 0.$$

Dle věty o dvou strážnících pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n = 0$.

Příklad 2 (h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$$

Platí:

$$\begin{aligned} \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n} &= (\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}) \frac{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} = \\ &= \frac{3^n + 2 \cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} \end{aligned}$$

Dále:

$$\sqrt{3^n} \leq \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n} \leq 2 \cdot \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} \leq 2 \cdot \sqrt{3^n + 2 \cdot 3^n} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^n}$$

Tedy $\sqrt{3} = \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} \leq \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} \leq \sqrt[n]{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^n}} \xrightarrow{\text{VoAL}} \sqrt{3}$

Z věty o dvou strážnících plyne: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}) = \sqrt{3}$.

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Příklad 2 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

Platí:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}$$

Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sqrt[n]{2} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1.$$

Dle věty o dvou strážnících pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = 1$.

Příklad 2 (j)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}}$$

Čitatele a jmenovatele odhadneme zvlášť.

Platí:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

Dále

$$2 = \sqrt[2n]{4^n} \leq \sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}} \leq \sqrt[2n]{2 \cdot 4^n} = 2 \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2}} \rightarrow 2$$

Tedy dle dvou strážníků $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}} = 2$.

Potom: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{3}{2}$.

Příklad 2 (k)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{2n}}$$

Nejdříve spočteme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \frac{\sqrt[2n]{2n}}{n^3}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \cdot \frac{1}{1+0},$$

přičemž $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (fakt z teorie) a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3} = 0$ dle růstové škály.

Pak zřejmě zadaná limita je 0 (lze odvodit například z definice či z věty limita typu omezená krát nula).

Příklad 2 (l)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1)^{n+1}}{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+1)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} n^{n+1} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+1}}{3^{n-1} n^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n-1}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 + \frac{1}{3n}} \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}} \stackrel{\text{VoAL} + (\star)}{=} \frac{2}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

($\star$): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{3n}\right)} = 1$ dle věty o dvou strážnících - dohady viz níže.

$$1 \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \leq \sqrt[n]{(1+1)(1+1)} = \sqrt[n]{4} \rightarrow 1$$

Příklad 2 (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot (1 + 2 + 4 + \dots + 2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{2^{n+1} - 1} \end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme použili vzorec pro součet geometrické posloupnosti: $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$, kde $a_i = q^{i-1} \cdot a_1$ (zde $k = n + 1, q = 2$).

Jelikož lze pomocí indukce dokázat nerovnost $2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{2^{n+1} - 1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak nám následující odhad a dva policisté říkají, že zadaná limita je 4.

$$\text{Odhad: } 2 \cdot 2 \leq 2 \cdot \sqrt[n]{2^{n+1} - 1} \leq 2 \cdot \sqrt[n]{2^n + 1} = 2 \cdot \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 4 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 4.$$

Příklad 3 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right)$$

Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že nekonzverguje, neb $\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, & n \text{ liché} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, & n \text{ sudé} \end{cases}$.

Příklad 3 (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{2}$$

Příklad 3 (c)

Použijeme vzorec (ze 2. cvičení 1 (d)): $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1$$

Příklad 3 (d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

Použijeme odhad $0 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$ - (z příkladu 5).

Dle dvou strážníků tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = 0$.

Příklad 3 (e)

$a, b, c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

Předpokládejme $a \geq b \geq c$ - jinak čísla přeznačíme.

Platí:

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3a^n} = a \sqrt[n]{3} \rightarrow a.$$

Dva strážníci pak říkají, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = a = \max\{a, b, c\}$.

Příklad 3 (f)

$a > b > 0$

Vytkneme nejsilnější člen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}}{a^2 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}}$$

Přičemž:

$$1 \leq \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}}{a \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}} \leq \frac{\sqrt[n]{1 + 1}}{\sqrt[n]{1}} = \sqrt[n]{2} \rightarrow 1.$$

Dle dvou strážníků pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} = \frac{1}{a}$.

Příklad 4 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$$

Použijeme: $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ a větu o dvou strážnících.

Platí:

$$a_n := \frac{n + (\sqrt[3]{n} - 1)^3}{n - (\sqrt{n+9} - 1)} \leq \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} \leq b_n := \frac{n + n}{n - \sqrt{n+9}}.$$

Přičemž:

$$a_n = \frac{n + n - 3\sqrt[3]{n^2} + 3\sqrt[3]{n} - 1}{n + 1 - \sqrt{n+9}} = \frac{n \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{n} + \frac{3}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1}{n}} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}} \right)} = \frac{2 - \frac{3}{\sqrt[3]{n} + \frac{3}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}} \xrightarrow{\text{VoAL}} \frac{2 - 0 + 0 - 0}{1 + 0 - 0} = 2$$

a

$$b_n = \frac{2n}{n \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}} \right)} \xrightarrow{\text{VoAL}} 2$$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} = 2.$$

Příklad 4 (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$$

Použijeme: $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ a větu o dvou strážnících.

Platí:

$$a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq b_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kx$$

Přičemž:

$$a_n = \frac{x}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{x(n+1)n}{2n^2} - \frac{n}{n^2} \xrightarrow{\text{VoAL}} \frac{x}{2}$$

a

$$b_n = \frac{xn(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{\text{VoAL}} \frac{x}{2} \cdot (1 + 0) = \frac{x}{2}$$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor = \frac{x}{2}.$$

Příklad 4 (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[3]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$$

Platí:

$$\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n = \sum_{k=1}^n (k\sqrt{n} - 1) \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor \leq \sum_{k=1}^n k\sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}$$

Platí:

$$a_n := \frac{\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\frac{n+1}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor} \leq b_n := \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n}$$

Dále:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n \left(1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)}{(n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

a platí:

$$2 = 2 \sqrt[n]{1} \leq 2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \leq 2 \sqrt[n]{1 + n} \leq 2 \sqrt[n]{2n} = 2 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2} \xrightarrow{\text{VoAL}} 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

tedy dle věty o dvou strážnících plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Dále:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{n\sqrt{n} \left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}}{(n+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}} \xrightarrow{\text{VoAL}} 2 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 2 \end{aligned}$$

Dle dvou strážníků pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor} = 2$.

Příklad 5 (a) Dokažte: pro $a > 1$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

Ověříme definici. Nechť $l \in \mathbb{R}$ lib. Jelikož je $x \mapsto a^x$ rostoucí fce, stačí najít $n \in \mathbb{N}$: $a^n > L$. Stačí tedy, aby $n > \log_a L$, což lze dle Archimédovy vl.

Příklad 5 (b) Dokažte: pro $a \in (0, 1)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

Zřejmě jde o posl. kladných čísel. Stačí tedy pro lib. $\varepsilon > 0$ nalézt $n \in \mathbb{N}$: $a^n < \varepsilon$ (neb jde o klesající posl.). Kýžené n existuje, neb stačí, aby $n > \log_a \varepsilon$ (což lze dle Archimédovy vl.).

Příklad 5 (c) Dokažte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Ukažme nejdříve, že jde o klesající posl. Tj. stačí ukázat, že $a_n - a_{n+1} > 0$ pro lib. $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n!}{n^n} - \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)^{n+1} - n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)!((n+1)^n - n^n)}{n^n(n+1)^{n+1}} > 0 \text{ zjevně}$$

Navíc zřejmě jde o posl. kladných členů. Tedy stačí pro lib. $\varepsilon > 0$ najít $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n!}{n^n} < \varepsilon$.

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Předpokládejme nyní, že máme přirozené číslo $n \geq n_0$. Stačí, aby platilo:

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$$

$$n! < n^{n-1}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, protože na obou stranách je součin $n - 1$ faktorů, avšak faktory napravo jsou vždy větší, nebo rovny faktorům nalevo.

Příklad 5 (d) Dokažte: pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Použijeme větu o posl. s kladnými členy. Stačí nám tedy ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, kde $b_n = \frac{a^n}{n!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot a^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 < 1$$

Příklad 5 (f) Dokažte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Dle věty o posl. s kladnými členy stačí ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$, což zřejmě platí.

Příklad 5 (g) Dokažte: pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Opět věty o posl. s kladnými členy stačí ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1$, což zřejmě platí.

Příklad 5 (h) Dokažte: pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

Stačí ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Kýžený vzorec pak plyne z věty o aritmetice limit.

Chceme tedy, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, kde $a_n = n$. Dle věty o posl. s kladnými členy stačí, aby $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Přičemž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1 + 0 = 1$.

Příklad 5 (i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Indukcí. Pro $n = 1$ zřejmě platí.

Dokažme nyní $n \rightarrow n + 1$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{\text{IP}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$$